# 無限階擬微分作用素の指数解析に関して (無限階擬微分作用素の超局所解析と漸近解析)

AUTHOR(S):

神本, 晋吾

数理解析研究所講究録
第 1835 巻 2013 年 10-20



# 無限階擬微分作用素の指数解析に関して

京都大学数理解析研究所　神本晋吾 (Shingo Kamimoto)
Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University

## 1 Introduction

本稿の目的は [Km] で得られた無限階擬微分作用の指数解析に関する結果の紹介である. $T^*\mathbb{C}^n$ 上の無限階擬微分作用素の層を $\mathscr{E}_{\mathbb{C}^n}^{\mathbb{R}}$ により表す. $z^* \in \dot{T}^*\mathbb{C}^n$ に対し, $z^*$ での $\mathscr{E}_{\mathbb{C}^n}^{\mathbb{R}}$ の茎 $\mathscr{E}_{\mathbb{C}^n,z^*}^{\mathbb{R}}$ は表象を用いて次のように表すことができる;

$$\mathscr{E}_{\mathbb{C}^n,z^*}^{\mathbb{R}} = \varinjlim_{z^*\in\Omega} \mathscr{S}(\Omega)/\mathscr{N}(\Omega).$$

ここで, 帰納極限は $z^*$ の錐状開近傍を渡るとし,$\mathscr{S}(\Omega)$,$\mathscr{N}(\Omega)$ は, それぞれ $\Omega$ 上の表象, 零表象の空間を表すとする.

無限階擬微分作用素を用いた解析を行う上で, 作用素の積構造は重要となる. しかし,$\Omega$ 上の表象の空間 $\mathscr{S}(\Omega)$ は Leibniz 則より定まる自然な積の下で閉じていないことが知られている. L.Boutet de Monvel は表象の空間の拡張であり,Leibniz 則と類似の積構造の下で閉じている形式表象の空間を導入した ([Bo]). また, 近畿大学の青木貴史氏により,L.Boutet de Monvel の導入した形式表象の空間を, 更に拡張した形式表象の空間が導入された ([A2]). 本稿では青木により導入された形式表象を用いる.

$\Omega$ 上の形式表象 (形式零表象, 劣 1 階形式表象) の空間を $\widehat{\mathscr{S}}(\Omega)(\widehat{\mathscr{N}}(\Omega), \widehat{\mathscr{S}}^{(1-0)}(\Omega))$ により表す. また $P \in \widehat{\mathscr{S}}(\Omega)$ が定める $\widehat{\mathscr{S}}(\Omega)/\widehat{\mathscr{N}}(\Omega)$ の元を : $P :\in \widehat{\mathscr{S}}(\Omega)/\widehat{\mathscr{N}}(\Omega)$ により表す.

無限階擬微分作用素の指数解析に関して, 青木による次の結果が知られている ([A2, A3]);

**定理 1.1** ([A2] Theorem 3.1.). $p, q \in \widehat{\mathscr{S}}^{(1-0)}(\Omega)$ に対し, 次を満たす $r \in \widehat{\mathscr{S}}^{(1-0)}(\Omega)$ が存在する;

$$:e^p::e^q:=:e^r:. \tag{1.1}$$

**定理 1.2** ([A3] Theorem 4.1.). $p \in \widehat{\mathscr{S}}^{(1-0)}(\Omega)$ に対し,次を満たす $q \in \widehat{\mathscr{S}}^{(1-0)}(\Omega)$ が存在する;

$$e^{:p:} =: e^q:. \tag{1.2}$$

定理 1.1 は表象に対する Campbell-Hausdorff の公式の類似物を与えていると解釈することができる. 実際,(1.1) を満たす $r$ の存在性の証明は, $r$ を $p, q$ より帰納的に定まる形式表象の列の和として表し, その和の収束性に帰着されるが, この形式表象列の構成法が明示的に与えられているためである ([A2]). また, 定理 1.2 は指数型の作用素 $e^{:p:}$ の表象 $e^q$ の対数 $q$ の構成法を与えていると解釈することができる.

これに対して, 次の問題を考えてみる;

(i) $p, q \in \widehat{\mathscr{S}}^{(1-0)}(\Omega)$ に対し, 次を満たす $r$ は存在するか;

$$e^{:r:} = e^{:p:}e^{:q:}. \tag{1.3}$$

(ii) $q \in \widehat{\mathscr{S}}^{(1-0)}(\Omega)$ に対し, 次を満たす $p$ は存在するか;

$$e^{:p:} =: e^q:. \tag{1.4}$$

つまり, 青木の議論での表象と作用素の立場を逆にし, (i) では作用素 $:p:$, $:q:$ から Campbell-Hausdorff の公式により定まる作用素 $:r:$ の性質を, (ii) では指数型の表象を持つ作用素 $:e^q:$ の対数 $:p:$ の性質を考える.

(i) の問題に関しては, 劣一階の形式表象 $p, q$ より定まる $r$ に対する評価を与えることにより,$p, q$ が有界の形式表象の場合には $r$ が収束し, 有界な形式表象が定まり, また,(ii) の問題に関しては $p$ の構成法を与え,$p$ の満たす評価を求めることにより, $q$ が有界な形式表象の場合には $p$ が収束し有界な形式表象が定まるという結果が得られた ([Km]). 本稿では, この結果について紹介する.

## 2 形式表象

形式表象を以下のように定義する(詳しくは[A4],[AKY]等を参照); まず, 錐上開集合$\Omega \subset \dot{T}^*\mathbb{C}^n$, 正定数$d > 0$, $0 < r < 1$ に対し$\Omega[d], \Omega_r, d_r$を次で定義する;

$$\Omega[d] := \{(z,\zeta) \in \Omega; \|\zeta\| \geq d\},$$
$$\Omega_r := Cl[\bigcup_{(z,\zeta)\in\Omega}\{(z,\zeta) \in \dot{T}^*\mathbb{C}^n;\ \|z'-z\| \leq r, \|\zeta'-\zeta\| \leq r\|\zeta\|\}],$$
$$d_r := d(1-r).$$

ここで, 形式表象に関する記述を簡潔にするため, 劣線型重み函数$\Lambda(\zeta)$を次で定義する;

**定義 2.1.** (**劣線型重み函数**) 以下の性質$(i), (ii), (iii)$を満たす$\tilde{\Lambda}(s)$が存在し,

$$\Lambda(\zeta) := \tilde{\Lambda}(\|\zeta\|) \quad (\zeta \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\})$$

と表されるとき$\Lambda : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_{>0}$を劣線型重み函数と呼ぶ;

$(i)$ $\tilde{\Lambda} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$は非減少,

$(ii)$ $\lim_{s\to+\infty} \tilde{\Lambda}(s)/s = 0$,

$(iii)$ 任意の$c > 0$に対し$\tilde{\Lambda}(cs) \leq c\tilde{\Lambda}(s)$.

劣線型重み函数$\Lambda(\zeta)$として, 具体的には

$$\Lambda(\zeta) = C\|\zeta\|^\rho \quad (0 \leq \rho < 1,\ C > 0)$$

等を考えている.

このとき, 形式表象等を次で定義する;

**定義 2.2.**

$(i)$ $t$に関する形式冪級数$P(t;z,\zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i P_i(z,\zeta)$がある$d > 0$と$r \in (0,1)$に対し

$$P_i(z,\zeta) \in \Gamma(\Omega_r[(i+1)d_r]; \mathscr{O}_{T^*\mathbb{C}^n}) \quad (i = 0,1,2,\cdots)$$

となり, 更に $0 < A < 1$ と劣線型重み函数 $\Lambda(\zeta)$ が存在し, 任意の $i = 0, 1, 2, \cdots$ に対し $\Omega_r[(i+1)d_r]$ 上

$$|P_i(z,\zeta)| \le A^i e^{\Lambda(\zeta)}$$

を満たすとき $\Omega$ 上の形式表象と呼ぶ. $\Omega$ 上の形式表象のなす空間を $\widehat{\mathscr{S}}(\Omega)$, その $z^*$ での茎を $\widehat{\mathscr{S}_{z^*}}$ により表す.

(ii) $P(t;z,\zeta) \in \widehat{\mathscr{S}}(\Omega)$ が次を満たすとき,$\Omega$ 上の形式零表象と呼ぶ;$d > 0, r, A \in (0,1)$ と劣線型重み函数 $\Lambda(\zeta)$ が存在し, 任意の $m = 1, 2, \cdots$ に対し $\Omega_r[md_r]$ 上

$$\left|\sum_{i=0}^{m-1} P_i(z,\zeta)\right| \le A^i e^{\Lambda(\zeta)}.$$

$\Omega$ 上の形式零表象のなす空間を $\widehat{\mathscr{N}}(\Omega)$, その $z^*$ での茎を $\widehat{\mathscr{N}_{z^*}}$ により表す.

(iii) $p(t;z,\zeta) \in \widehat{\mathscr{S}}(\Omega)$ が次を満たすとき,$\Omega$ 上の劣 1 階形式表象と呼ぶ: $d > 0, r, A \in (0,1)$ と劣線型重み函数 $\Lambda(\zeta)$ が存在し, 任意の $i = 0, 1, 2, \cdots$ に対し $\Omega_r[(i+1)d_r]$ 上

$$|p_i(z,\zeta)| \le A^i \Lambda(\zeta). \tag{2.1}$$

$\Omega$ 上の劣 1 階形式表象のなす空間を $\widehat{\mathscr{S}}^{(1-0)}(\Omega)$, その $z^*$ での茎を $\widehat{\mathscr{S}_{z^*}}^{(1-0)}$ により表す. また, 劣線型重み函数 $\Lambda(\zeta)$ として, ある定数 $M > 0$ が取れ (2.1) を満たすとき $p$ は有界であるという.

形式表象 $p, q \in \widehat{\mathscr{S}}(\Omega)$ に対し, Leibniz 則より定まる積 $p \circ q$ を

$$p \circ q(t,z,\zeta) := e^{t\langle \partial_\zeta, \partial_w \rangle} p(t,z,\zeta) q(t,w,\eta)|_{z=w,\zeta=\eta}$$

により定める.

$$p \circ q(t,z,\zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i p \circ q_i(z,\zeta)$$

と $t$ に関し展開すると,$t^i$ の係数は

$$p \circ q_i(z,\zeta) = \sum_{h_1+h_2+|\alpha|=i} \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha p_{h_1}(z,\zeta) \partial_z^\alpha p_{h_2}(z,\zeta)$$

により与えられる. $\widehat{\mathscr{S}}(\Omega)$ は上で定めた積 $\cdot\circ\cdot$ の下で閉じていることが知られている.

$P, Q \in \widehat{\mathscr{S}}(\Omega)$ が定める $\widehat{\mathscr{S}}(\Omega)/\widehat{\mathscr{N}}(\Omega)$ の元: $P :, : Q :\in \widehat{\mathscr{S}}(\Omega)/\widehat{\mathscr{N}}(\Omega)$ に対し, その積を

$$: P :: Q :=: P \circ Q :$$

により定める.

## 3 擬微分作用素のCampbell-Hausdorffの公式に関して

まず,$p, q \in \widehat{\mathscr{S}}(\Omega)$ に対し, 次を満たすような $s$ に関する形式冪級数 $r(s) = \sum_{k=1}^{\infty} s^k r_k$ を構成する;

$$e^{:r(s):} := e^{s:p:} e^{s:q:}.$$

Campbell-Hausdorffの公式により $r_k$ は次の漸化式により帰納的に定まる ([KO]);

$$r_1 = p + q, \tag{3.1}$$

(3.2)

$$(k+1) r_{k+1} = -\sum_{l=2}^{k} \sum_{j_1+\cdots+j_l=k+1} \frac{j_l}{l!} \operatorname{ad}(r_{j_1}) \cdots \operatorname{ad}(r_{j_{l-1}}) r_{j_l} + \frac{\operatorname{ad}(p)^k}{k!} q \quad (k \geq 1).$$

ただし,

$$\operatorname{ad}(p) q = p \circ q - q \circ p.$$

よって,上で構成した級数 $r(s)$ が $s = 1$ で収束し $r(1)$ が形式表象を定めれば, この $r(1)$ が (1.3) を満たす $r$ を与える.

よって,各 $r_k$ の満たす評価が問題となるが, $r_k$ に関して次を示すことができる;

**定理 3.1.** $p, q \in \widehat{\mathscr{S}}^{(1-0)}(\Omega)$ に対し,

$$r_k = \sum_{i=0}^{\infty} t^i r_{k,i}(z, \zeta)$$

を (3.2) により帰納的に定めるとき,$r_{k,i}$ は次の評価を満たす; ある定数 $C, d > 1, 0 < r, A < 1$ と劣線型重み関数 $\Lambda(\zeta)$ が存在し $\Omega_r[(i+1)d_r]$ 上, 次が成立する

$$|r_{k,i}(z, \zeta)| \leq (k-1)! C^{k-1} A^i \left( \frac{\Lambda(\zeta)}{\|\zeta\|} \right)^{k-1} \Lambda(\zeta) \quad (k \geq 1, i \geq k-1). \tag{3.3}$$

また,$k \geq 1, i < k-1$ に対しては $r_{k,i} = 0$.

注意 3.1. 定理 3.1 の $p, q \in \widehat{\mathscr{S}}^{(1-0)}(\Omega)$ が, ある $\tilde{d} > 0, 0 < \tilde{r}, \tilde{A} < 1$ と劣線型重み函数 $\tilde{\Lambda}(\zeta)$ に対し,$\Omega_{\tilde{r}}[(i+1)\tilde{d}_{\tilde{r}}]$ 上

$$|p_i(z,\zeta)|, |q_i(z,\zeta)| \leq \tilde{A}^i \tilde{\Lambda}(\zeta) \tag{3.4}$$

を満たすとすると,(4.5) の $\Lambda(\zeta)$ として $\tilde{\Lambda}(\zeta)$ を取ることができる.

定理 3.1 は,次の補題を繰り返し用いることにより得られる;

**補題 3.2** ([AKY] 補題 4.2.3)**.** $p(z,\zeta) \in \Gamma(\Omega_r[d_r]; \mathscr{O}_{T^*\mathbb{C}^n})$ がある $m \in \mathbb{N}, k, l \in \mathbb{N}_0, N > 1$ と劣線型重み関数 $\Lambda(\zeta)$ が存在し,任意の $0 < \varepsilon < r$ に対し $\Omega_{r-\varepsilon}[d_{r-\varepsilon}]$ 上

$$|p(z,\zeta)| \leq \frac{\Lambda(\zeta)^k}{\varepsilon^{Nm}\|\zeta\|^l} \tag{3.5}$$

を満たすとする. このとき,任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ と $0 < \varepsilon < r$ に対し $\Omega_{r-\varepsilon}[d_{r-\varepsilon}]$ 上

$$|\partial_z^\alpha p(z,\zeta)| \leq \frac{(m+1)^{|\alpha|} e^N \alpha! \Lambda(\zeta)^k}{\|\zeta\|^l \varepsilon^{|\alpha|+Nm}}, \tag{3.6}$$

$$|\partial_z^\alpha \partial_\zeta^\beta p(z,\zeta)| \leq \frac{C_m^l (m+1)^{|\alpha+\beta|} e^N 2^{|\beta|} \alpha! \beta! \left(1 + \dfrac{\varepsilon}{m+1}\right)^k \Lambda(\zeta)^k}{\|\zeta\|^{l+|\beta|} \varepsilon^{|\alpha+\beta|+Nm}} \tag{3.7}$$

が成立する.ただし $C_m := \dfrac{m+1}{m}$.

しかし,一般に任意の $p, q \in \widehat{\mathscr{S}}^{(1-0)}(\Omega)$ に対し, (4.5) の評価からは $r(1)$ が $\widehat{\mathscr{S}}^{(1-0)}(\Omega)$ に属することを示すことはできない. 実際,例えば $p, q$ は (3.4) の $\tilde{\Lambda}(\zeta)$ として $\|\zeta\|^\rho$ $(0 < \rho < 1)$ としたものを満たすとする. すると, $\|\zeta\| = (i+1)d_r$ となる $\zeta$ に対して,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{i+1} (k-1)! C^{k-1} \left(\frac{\tilde{\Lambda}(\zeta)}{\|\zeta\|}\right)^{k-1} &\geq i! C^i \|\zeta\|^{(\rho-1)i} \\ &= i! C^i ((i+1)d_r)^{(\rho-1)i}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

よって, $i$ が十分大きい場合は, Stirling の公式から (3.8) の右辺はある定数 $\tilde{C}>0$ に対し $i^{\rho i}\tilde{C}^i$ の様な振る舞いをすることがわかるため,

$$r(1)=\sum_{i=0}^{\infty}t^i\sum_{k=1}^{i+1}r_{k,i}(z,\zeta) \tag{3.9}$$

に対して, 劣 1 階形式表象の満たすべき評価 (2.1) を得ることができないためである.

しかし, 同様の理由から $p,q$ が有界の場合には次を示すことができる;

**定理 3.3.** $p,q\in\widehat{\mathscr{S}}^{(1-0)}(\Omega)$ を有界な形式表象とする. このとき, 次を満たす有界な形式表象 $r\in\widehat{\mathscr{S}}^{(1-0)}(\Omega)$ が存在する;

$$e^{:r:}=e^{:p:}e^{:q:}.$$

## 4 指数型の表象を持つ擬微分作用素の対数の構成に関して

$q\in\widehat{\mathscr{S}}^{(1-0)}(\Omega)$ に対し, $s$ に関する形式冪級数 $p(s)=\sum_{k=1}^{\infty}s^kp_k$ を

$$e^{:p(s):}=:e^{sq}: \tag{4.1}$$

を満たすように構成することを考える.

[KO] の Campbell-Hausdorff の公式の導出法に従うことにより, $p(s),q$ に関する次の関係式が得られる;

$$qe^{sq}=\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{ad}(p(s)))^l}{(l+1)!}p'(s)\right)\circ e^{sq}. \tag{4.2}$$

ただし,$p'(s)$ は

$$p'(s)=\frac{d}{ds}p(s)=\sum_{k=1}^{\infty}ks^{k-1}p_k.$$

(4.2) の両辺に $e^{-sq}$ を乗じ,$s^k$ の係数を比較することにより, $p_k$ に関する次の形の漸化式を得る;

$$p_1=q, \tag{4.3}$$

$$(4.4)\quad (k+1)p_{k+1} = -\sum_{l=2}^{k} \sum_{j_1+\cdots+j_l=k+1} \frac{j_l}{l!}\,\mathrm{ad}(p_{j_1})\cdots\mathrm{ad}(p_{j_{l-1}})p_{j_l} + R_k \quad (k \geq 1).$$

ここで,$R_k$ は $p_1, \cdots, p_k, q$ から定まる項であり, この漸化式を用いて $p_k$ を帰納的に定めていくことができる. $R_k$ の各項は $p_1, \cdots, p_k$ を $\mathrm{ad}(p_{j_1})\cdots\mathrm{ad}(p_{j_{l-1}})p_{j_l}$ $(j_1+\cdots+j_l \leq k)$ の形で含んでいるため,$R_k$ は $p_{k+1}$ の決定に関して低次の項と考えることができる. そのため, 漸化式 (3.2) と (4.4) は類似の構造を持っていると考えられる.

$p_{k+1}$ の決定の構造を細かく調べることにより, 定理 3.1 と同様に $p_{k+1}$ に対する次の評価が得られる;

**定理 4.1.** $q \in \widehat{\mathscr{S}}^{(1-0)}(\Omega)$ とし,

$$p_k = \sum_{i=0}^{\infty} t^i p_{k,i}(z,\zeta)$$

を (4.4) により帰納的に定めるとき,$p_{k,i}$ は次の評価を満たす; ある定数 $C, d > 1$, $0 < r, A < 1$ と劣線型重み関数 $\Lambda(\zeta)$ が存在し $\Omega_r[(i+1)d_r]$ 上, 次が成立する

$$(4.5)\qquad |p_{k,i}(z,\zeta)| \leq (k-1)!C^{k-1}A^i \left(\frac{\Lambda(\zeta)}{\|\zeta\|}\right)^{k-1} \Lambda(\zeta) \quad (k \geq 1, i \geq k-1).$$

また,$k \geq 1, i < k-1$ に対しては $p_{k,i} = 0$.

定理 3.3 と同様の理由より, 定理 4.1 から次が得られる;

**定理 4.2.** $q \in \widehat{\mathscr{S}}^{(1-0)}(\Omega)$ を有界な形式表象とする. このとき, 次を満たす有界な形式表象 $p \in \widehat{\mathscr{S}}^{(1-0)}(\Omega)$ が存在する;

$$e^{:p:} =: e^q : .$$

## 5 指数型無限階擬分作用素の応用に関して

指数型無限階擬分作用素の顕著な応用例としては, ロシアの M.D.Bronstein による解析係数弱双曲型方程式の超分布基本解の構成 ([Br]), 東京大学の片岡清臣による解析的エネルギー法の理論 ([Kt]) などがある. 例えば, 2 次元の空間で主

要部が $P(x,\partial)=\partial_1^2$ のような作用素は $x_1$ につき弱双曲型であり, いわゆる特性根が重複するため, 低階項によっては初期値問題の基本解が作りにくい. 実際 $P(x,\partial)=\partial_1^2-i\partial_2$ の初期値問題の基本解は,$\exp(\pm x_1\sqrt{i\partial_2})$ などを使って表すために Schwartz 超関数から逸脱したものとなる. しかし逆に, 適当な超分布の空間の中で考えるならば, どんな大きな $\lambda>0$ に対しても指数型無限階擬分作用素 $Q=\exp(\lambda x_1\sqrt{|\partial_2|})$ は, 特異性を変えない自己同形として超分布の空間に作用する. 従って内部自己同型による変換 $Q^{-1}(\partial_1^2-i\partial_2)Q$ で作用素を基本解が作りやすい準楕円型擬微分作用素 $(\partial_1+\lambda\sqrt{|\partial_2|})^2-i\partial_2$ に帰着させる事ができる ($\lambda>1$ にとる). これは佐藤, 河合, 柏原が准楕円型作用素 $\partial_1^2-\partial_2$ を無限階微分作用素によって $\partial_1^2$ に帰着させたのに対し, ある意味で反対の事をおこなっている事になる. また, 混合問題への応用などこの方面でのさらなる発展が筑波大学の梶谷邦生氏, 若林誠一郎氏によってなされている ([KW]). 片岡による解析的エネルギー法とは佐藤超関数の空間で $L^2$-的理論 (エネルギー不等式) を復活させる方法である. 例えば $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ を実解析的境界をもつ有界領域とし, 熱方程式に対する Dirichlet 境界値問題

$$\begin{aligned}(\partial_t-\Delta_x)u(x,t)=0,\quad & t\in(0,1),x\in\Omega,\\ u(x,t)=0,\quad & t\in(0,1),x\in\partial\Omega\end{aligned}$$

を考えるとき, 通常ならエネルギー形式 $E(t)=\int_\Omega|u(t,x)|^2dx$ の単調減少性などにより, 初期値境界値問題の一意性が示せる. しかし佐藤超関数解では上の境界値問題はよく定義されるものの, もちろん $L^2$ ノルムのようなものを考えることはできない. しかし半正定値エルミート核関数 $E(t,s):=\int_\Omega u(t,x)\bar{u}(s,x)dx$ ならば $t,s$ の佐藤超関数として定義でき, 微分方程式 $(\partial_t-\partial_s)E(t,s)=0$ を満たす. このような議論と半正定値エルミート核関数の超局所的な性質によって, 結局 $u(x,t)$ は $(0,1)\times\bar{\Omega}$ の近傍で実解析的となることがいえる. ここでキーポイントとなるのは半正定値エルミート核関数であるが, この方法をより一般の方程式に適用しようとするとき現れるのがエルミート核関数

$$K(t,s):=\int_\Omega(Q(t,x,\partial_x)+Q^*(s,x,\partial_s))u(t,x)\bar{u}(s,x)dx$$

である ($Q$ は擬微分作用素,$Q^*$ はその複素共役). $K(t,s)$ 自体は半正定値とならないが, 例えば $Q$ の主シンボルの超局所空間上の値によっては, ある種の指数型

無限階擬微分作用素 $\exp(P)(t,s,\partial_t,\partial_s)$ を施すと, $\exp(P)K(t,s)$ を半正定値エルミート核関数にすることができ, 上のような議論が成立する. このような指数型無限階擬微分作用素 $\exp(P)(t,s,\partial_t,\partial_s)$ の構成に青木による無限階擬微分作用素の指数解析が直接的に応用されている.

## 参考文献


[A1] Aoki, T., *Symbols and formal symbols of pseudodifferential operators*, Advanced Studies in Pure Math. **4** (K.Okamoto, ed.), Group Representation and Systems of Differential Equations, Proceedings Tokyo 1982, Kinokuniya, Tokyo; North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1984, pp.181-208.

[A2] ———, *Calcul exponentiel des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini. I*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **33** (1983), 227-250.

[A3] ———, *Calcul exponentiel des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini. II*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **36** (1986), 143-165.

[A4] ———, 無限階擬微分作用素の表象理論. 東京大学数理科学セミナリーノート, **14** (1997).

[AKY] Aoki, T., K. Kataoka and S. Yamazaki, 超函数・ＦＢＩ変換・無限階擬微分作用素, 共立出版, 2004.

[Bo] Boutet de Monvel, L., *Opérateurs pseudo-différentiels analytiques et opérateurs d'ordre infini*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **22** (1972), pp.229-268.

[Br] Bronstein, M.D., *The Cauchy problem for hyperbolic operators with characteristics of variable multiplicities*, 1982(transl.), Trans. Moscow Math. Soc., **41** (1980), pp.87-103.

[KW] Kajitani, K., and S. Wakabayashi, *The hyperbolic mixed problem in Gevrey classes*, Japan. J. Math., **15** (1989), pp.309-383.

[Km] Kamimoto, S., 無限階擬微分作用素の形式核関数と指数解析について, 東京大学大学院数理科学研究科修士論文, 2009.

[Kt] Kataoka, K., *Microlocal energy methods and pseudo-differential operators*, Invent. math. **81** (1985), pp.305-340

[KO] Kobayashi, T. and T. Oshima, リー群と表現論, 岩波書店, 2005.

[SKK] Sato, M., T. Kawai and M. Kashiwara, *Microfunctions and Pseudodifferential Equations, Hyperfunctions and Pseudo-Differential Equations* (H.Komatsu, ed.), Proceeding, Katata 1971, Lecture Notes in Math. **287**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1973, pp.265-529.